Problemes

No hem tingut gairebé cap resposta als problemes proposats al *Notícies* 12. Potser l'estiu ha tornat mandrosos els nostres lectors i col·laboradors habituals. Abans de proposar-ne massa de nous, potser val la pena deixar passar una nova edició del *Notícies* per tal que tingueu més temps per rumiar. Així en aquesta edició no donem encara les solucions dels problemes A40 i A41 i només publiquem l'única solució rebuda del problema B42. Els tornem a proposar juntament amb dos de nous. Per cert que al *Notícies* 13 ens vàrem equivocar en la numeració dels problemes i vàrem repetir els números 40, 41 i 42. Els proposats allí hauríen de ser els A43, A44 i A45. Us demanem disculpes alhora que també us demanem que ens envieu solucions!

Com sempre, preguem als nostres lectors que si fan servir Tex o Latex per escriure les seves solucions, les enviïn per mail a l'adreça:

`pelegri.viader@econ.upf.es`

així com qualsevol proposta o suggeriment.

Problemes proposats

A40. (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Considerem la successió: $a_n - a_{n-1} = (a_{n-1} - 1)^2$, $a_1 = 2$. Trobeu $S = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots$.

A41. (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Sigui $T = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, $k \geq 1$, un conjunt finit de naturals $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$. Proveu que existeix $n \in N$ tal que $\forall a \in T, \exists b \in T$ tal que $ab = n$ si, i només si, $\forall \alpha \in R$ es compleix:

$$\left(\frac{d_1 + \cdots + d_k}{1/d_1 + \cdots + 1/d_k}\right)^\alpha = \frac{d_1^\alpha + \cdots + d_k^\alpha}{1/d_1^\alpha + \cdots + 1/d_k^\alpha}.$$

A46. (Proposat per Jordi Ramoneda, un amic constructor de Valldoreix que disfruta amb els problemes 'trencaclosques'.) Tenim 12 boles iguals i indistingibles en tot llevat del pes, ja que una d'aquestes pesa diferent de les altres, no sabem si més o menys. Disposem d'una balança de dos plats. Quin és el mínim nombre de pesades que ens cal fer per tal de trobar la bola diferent?

B47. (Proposat per Alfredo Cal Díaz. Vegeu la nota després del problema.) Anomenem *rosari* d'un triangle esfèric relativament a un dels seus costats al cercle màxim perpendicular al costat en qüestió i que forma angles iguals amb els altres dos costats. Demostreu les següents propietats del rosari:

a) El rosari d'un triangle relativament a un costat coincideix amb la mediana corresponent del triangle polar.

b) Els tres rosaris d'un triangle es tallen en un punt.

c) La mediana d'un triangle i el rosari del polar són suplementaris.

d) Si es perllonguen 90° els rosaris d'un triangle a partir dels costats, s'obté el polar.

NOTA: Aquest problema ens ha arribat a través del fill del professor Cal, que l'ha trobat entre els papers del seu pare. Alfredo Cal Díaz va néixer al Ferrol el 1878 i va morir a Madrid el 1956. El seu currículum és molt impressionant. Va ser oficial de Marina, enginyer naval i professor de l'Escola Naval, a més d'ocupar nombrosos càrrecs oficials relacionats amb el món del mar. Després de la guerra civil va ser empresonat de l'any 1939 al 1941 i durant aquest temps en presó va escriure el tractat titulat «Teoría Astronómica de la Homofocalidad». Des d'aquí publiquem aquests resultats seus com un petit homenatge i esperem que algun lector recordi prou geometria esfèrica com per abordar el problema. Si ens envieu alguna solució, us preguem que ens envieu els dibuixos en un format directament editable (*postscript* a ser possible) o, si no potser, prou ben fets en fulls separats com per poder-los escanejar.

Solucions

Problemes proposats a SCM/Notícies 12

B42. (Proposat per Anton Montes, UPC.) Sigui G un grup i H un subgrup de G. Sigui $x \in G$.

a) Demostreu que

$$(\forall x,\ xHx^{-1} \subset H) \ \Rightarrow\ (\forall x,\ xHx^{-1} = H).$$

b) Demostreu que per tot grup finit, si x és un element particular de G, es té la proposició següent (que anomenarem p):

$$xHx^{-1} \subset H \ \Rightarrow\ xHx^{-1} = H.$$

c) En el cas general que el grup G sigui d'ordre infinit, hi ha tres possibilitats per a la proposicíó p anterior:

i. La proposició p és certa per a tot grup G.
ii. La proposició p no és certa.
iii. La proposició p no es pot decidir.

Quina possibilitat és la correcta?

Solució: (Solució de Rafael Farré (UPC)).

a) De

$$(\forall x,\ xHx^{-1} \subset H)$$

es dedueix

$$(\forall x,\ x^{-1}Hx \subset H)\,.$$

Ara, multiplicant la segona per x a l'esquerra i per x^{-1} a la dreta, resulta

$$(\forall x,\ H \subset xHx^{-1}).$$

b) Si H és finit, cada element té ordre finit. Sigui m l'ordre de x. Llavors $x^{m-1} = x^{-1}$. Per altra banda, de $xHx^{-1} \subset H$ es dedueix que $\forall j \geq 0$, $x^jHx^{-j} \subset H$. Tenint en compte que $x^{-1} = x^{m-1}$, resulta que $x^{-1}Hx \subset H$. Ara, de les dues inclusions, resulta com en l'apartat anterior $xHx^{-1} = H$.

c) La resposta, en el cas d'un grup infinit general és falsa. Heus aquí un contraexemple: Sigui G el grup lliure de dos generadors (x, y) i H el subgrup format pels elements següents:

$$H = \{x^{n_1}y^{m_1}x^{n_2}y^{m_2}\cdots y^{m_k}x^{n_{k+1}},\quad n_1 \geq 0,\ n_{k+1} \leq 0,\ \sum_j n_j = 0\}.$$

òbviament H és un subgrup de G ja que el producte de dos elements de H pertany a H, i també si $h \in H$, l'invers $h^{-1} \in H$. És clar que $xHx^{-1} \subset H$, en canvi $H \not\subset xHx^{-1}$ ja que $y^m \in H$ però $y^m \notin xHx^{-1}$. Per tant tenim un exemple de grup, subgrup i element tals que la inclusió és estricta i no hi ha igualtat entre xHx^{-1} i H. De fet, tenim una cadena infinita d'inclusions estrictes:

$$\cdots \subset x^mHx^{-m} \subset \cdots \subset xHx^{-1} \subset H \subset x^{-1}Hx \subset \cdots \subset x^{-k}Hx^k \subset \cdots$$

Pelegrí Viader
UPF

Tesis

El Notícies ens agradaria publicar la foto dels nous doctors. Alguns doctorands no s'acaben d'animar. Demanem, doncs, als directors de tesi que animeu els vostres doctorands a col·laborar amb nosaltres. Gràcies.

- Xavier Bardina Simorra va llegir la seva tesi, dirigida per Maria Jolis Giménez, titulada *Convergència en llei cap a funcionals del procés de Wiener i una extensió de la fórmula d'Itô*, el dia 31 de març de 2000. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.